巾零行列からなる共役類の閉包の定義IdealとWeyl群の表現について(不変式論とその周辺)

数理解析研究所講究録
444巻 1981年 118-141

巾零行列からなる共役類の閉包の定義idealとWeyl群の表現について

東北大学 理学部 谷崎俊之

§0. 序

複素数体上の単純Lie環に対して、そのadjoint表現での不変式環とnilpotent varietyの関係を記述するKostantの古典的な結果[11]は、その後対称空間等に対する拡張が与えられ(Kostant−Rallis[12], Vinberg[22])、また特異点理論等へ応用されて、威力を発揮している。(Brieskorn[2], Slodowy[18])

最近De Concini−Procesiの論文[3]において、Weyl群の表現とも関連して、Kostantの結果をある方向で拡張しようとする試みが行なわれ、A_n型単純Lie環に対してある結果が得られたので、これを解説する。主要結果は§4の定理1及び§5の定理2であるが、ここではDe Concini−Procesiの原論文[3]とは少し違う方法で証明を与える。特に定理2の証明は原論文の証明に比べて非常に簡単になっている。

この小文を書くにあたり、Springer表現の事等々親切に

教えて下さった堀田良之先生に感謝します。

§1. Kostant の結果 [11] の復習

G を $\mathbb{C}$ 上の reductive な連結線型代数群，T を G の極大 torus とし，その Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$ とする。また $\mathfrak{g}$ 中の nilpotent element 全体のつくる $\mathfrak{g}$ の subvariety を N とする。このとき N の定義 ideal $I(N) := \{f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}] \mid f|N = 0\}$ は，次の様に不変式環を用いて記述される。すなわち，G の $\mathfrak{g}$ 上での adjoint 表現での不変式環を $\tilde{J} = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ とするとき，$\tilde{J}$ は $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ の graded subalgebra であるが，$\tilde{J}^+ = \bigoplus_{k>0} (\tilde{J})_k$ とおくとき.

定理 (Kostant)

$$I(N) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]\,\tilde{J}^+$$

(従って，adjoint 表現に関して，N は Mumford [17] の意味での unstable point の全体になっている。)

また $\tilde{J}$ は algebra として，有限個の斉次代数独立な生成系 $f_1, f_2, \cdots, f_\ell$ ($\ell = \dim T$) を持つので

$$I(N) = (f_1, \cdots, f_\ell)$$

となる。

さて $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{t}$ に関する Weyl 群を W として，$J = \mathbb{C}[\mathfrak{t}]^W$ とおくとき，$\tilde{J}$ と J の間に次の関係が成立する。

<u>定理</u> (Chevalley)

制限写像を $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \xrightarrow{g} \mathbb{C}[\mathfrak{t}]$ とするとき

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[\mathfrak{g}] \arrow[r, "g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{C}[\mathfrak{t}] \\ \tilde{J} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sim"] & J \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

である。

いま J は graded algebra なので同様に J^+ を定義すると、次の事はよく知られている。

<u>命題</u>

$$\mathbb{C}[\mathfrak{t}]/\mathbb{C}[\mathfrak{t}]J^+ \cong H^*(G/B, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[W] \quad (W\text{-加群として})$$

(ただし, B は T を含む Borel 部分群とする。)

さて algebra $\mathbb{C}[\mathfrak{t}]/\mathbb{C}[\mathfrak{t}]J^+$ は、次の様に幾何学的に解釈できる。

$\mathbb{C}[\mathfrak{t}] = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]/I(\mathfrak{t})$ ($I(\mathfrak{t})$ は $\mathfrak{t}$ の定義 ideal) なので

$$\mathbb{C}[\mathfrak{t}]/\mathbb{C}[\mathfrak{t}]J^+ \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}]/I(\mathfrak{t}) + \mathbb{C}[\mathfrak{g}]\tilde{J}^+ = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]/I(\mathfrak{t}) + I(N)$$

である。よって $\mathbb{C}[\mathfrak{t}]/\mathbb{C}[\mathfrak{t}]J^+$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{t}$ と nilpotent variety N との scheme 論的な意味での intersection $\mathfrak{t} \cap N$ の座標環 $\mathbb{C}[\mathfrak{t} \cap N]$ になっている。$\mathfrak{t}$ と N の集合論的な意味での intersection は $\{0\}$ なので $\mathfrak{t} \cap N$ は原点 $\{0\}$ の上に support を持つ non-reduced な scheme である。

(この節で述べた事のA型での実例については §3.1 を参照されたい。)

§2. 問題の定式化

nilpotent variety N は G の作用に関して有限個の共役類にわかれるが、このうちで最も次元の高い共役類が唯一つあり、この共役類に含まれる $X \in \mathfrak{g}$ を regular nilpotent element という。一般の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $O_X = \mathrm{Ad}(G)\cdot X$ と書くとき、X が regular nilpotent ならば $N = \overline{O_X}$ である。我々の目標は §1 に於ける N を一般の $X \in N$ に対する $\overline{O_X} \subset N$ で置き換えたとき、§1. での話がどの様に拡張されるかを調べる事である。勝手な $X \in N$ に対しても $\mathbb{C}[\mathfrak{h} \cap \overline{O_X}]$ $\left(= \mathbb{C}[\mathfrak{g}]/I(\mathfrak{h}) \cap I(\overline{O_X}) = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]/\varrho(I(\overline{O_X}))\right)$ には自然に W-加群の構造が入る。

問題 1. $\mathbb{C}[\mathfrak{h} \cap \overline{O_X}]$ の W-加群としての構造を求めよ。

Weyl 群の表現についてはこれまで多くの研究があり、各 nilpotent conjugacy class に対して種々の cohomology を使って幾つかの方法で表現の構成がなされている。
(Cf. Springer [20], [21], Slodowy [19], Kazhdan-Lusztig [9], Lusztig [16])

問題 2. $\mathbb{C}[\mathfrak{h} \cap \overline{O_X}]$ と Springer 表現 ([20], [21]) との間に何らかの関係があるか。

さて $\mathbb{C}[\mathfrak{h} \cap \overline{O_X}]$ を調べるためには、$\overline{O_X}$ の定義 ideal $I(\overline{O_X})$ を調べたい訳である。

問題 3. $I(\overline{O_X})$ を求めよ。具体的には ideal $I(\overline{O_X})$ の有限個

からなる生成系 $f_1, \cdots, f_r$ を与えよ。

§1. で述べた様に X が regular nilpotent なときには問題3に対する答はあるが、一般の $X \in N$ に対しては、解答は知られていない。（A_m 型のときでもない。）

以下紹介する De Concini — Procesi の結果は $G = GL_m(\mathbb{C})$ のときに、上の問題1及び2に対する答を与えるものである。§3 以降では $G = GL_m(\mathbb{C})$ のときのみ扱う。

§3. $GL_m(\mathbb{C})$ の nilpotent variety

3.1　$G = GL_m(\mathbb{C})$, $T = \left\{ \begin{bmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_m \end{bmatrix} \middle| g_i \in \mathbb{C}^{\times} \right\}$ とおくときその Lie 環は $\mathfrak{g} = M_m(\mathbb{C})$, $\mathfrak{t} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_m \end{bmatrix} \middle| x_i \in \mathbb{C} \right\}$ となる。また $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ に対して $Ad(g) \cdot X = gXg^{-1}$ であり、nilpotent variety N は $N = \{\text{巾零行列}\} = \{\text{固有値が全て } 0 \text{ である行列}\}$ で与えられる。$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{t}$ に関する Weyl 群を W とするとき、W は m 次対称群 S_m と同型でその $\mathfrak{t}$ への作用は、

$$w \cdot \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{w^{-1}(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_{w^{-1}(m)} \end{pmatrix}$$

となる。さらに $X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\det(tI - X) = t^m - f_1(X)t^{m-1} + f_2(X)t^{m-2} - \cdots + (-1)^m f_m(X)$$
$$(f_1(X) = \mathrm{Trace}(X),\ f_m(X) = \det X)$$

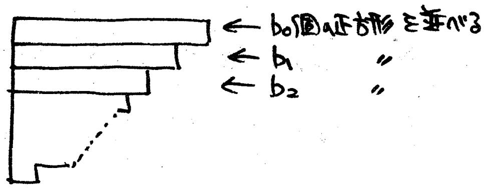
とおくとき、$\tilde{J} = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G = \mathbb{C}[f_1, \cdots, f_m]$, $J = \mathbb{C}[\mathfrak{t}]^W = \mathbb{C}[f_1|_{\mathfrak{t}}, \cdots, f_m|_{\mathfrak{t}}]$ となる。ここで $f_i\begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_m \end{pmatrix}$ は $x_1, \cdots, x_m$ の i 次基本対称式である事に注意しておく。

3.2 nilpotent conjugacy class の parametrization

$X, Y \in \mathfrak{g} = M_n(\mathbb{C})$ が共役であるためにはその Jordan 標準形が一致する事が必要十分なので {nilpotent conjugacy class} は n の分割の集合と1対1に対応する事がわかる。ここで、n の分割とは、自然数からなる有限列 $\alpha = (b_0 \geqq b_1 \geqq \cdots\cdots)$ であって $\sum_i b_i = n$ なるものとする。n の分割 $\alpha = (b_0 \geqq b_1 \geqq \cdots)$ に対して

$$X \underset{GL_n(\mathbb{C})}{\sim} \begin{bmatrix} N_{b_0} & & \\ & N_{b_1} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}, \quad N_k = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}}^{k}$$

となる X を Type α の nilpotent element という事にして、Type α の nilpotent element 全体からなる共役類を $\mathcal{O}_\alpha$ とかく。



また $\alpha = (b_0 \geqq b_1 \geqq \cdots)$ を図式的に表わすときに、右図の様な大きさが n の Young 図形で書く。以上まとめて

$$\{\text{nilpotent conjugacy class}\} \longleftrightarrow \{n \text{ の分割}\} \longleftrightarrow \{\text{大きさ } n \text{ の Young 図形}\}$$

また、n の分割 $\alpha = (b_0 \geqq b_1 \geqq, \cdots\cdots)$ に対してその双対分割 $\check{\alpha} = (c_0 \geqq c_1 \geqq \cdots\cdots)$ を $c_i = \#\{j \mid b_j \geqq i+1\}$ で定義する。operation $\alpha \longmapsto \check{\alpha}$ は Young 図形の転置に対応する。

3.3 closure relation

n の分割全体の集合に次の様な半順序をいれる。

<u>定義</u> $\alpha = (b_0 \geqq b_1 \geqq \cdots)$, $\tau = (b_0' \geqq b_1' \geqq \cdots\cdots)$ に対して

$\alpha \geq \tau \iff \sum_{k=0}^{j} b_k \geqq \sum_{k=0}^{j} b_k'$ (ただし長さが違うときには、適

当に 0 を補って考えるものとする。)

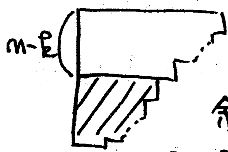
<u>命題</u> (Gerstenhaber [4], Cf. 草場 [15])

$$\sigma \succ \tau \iff \tau' \succ \sigma' \iff \overline{O_\sigma} \supset O_\tau$$

簡単にこの命題の証明を述べよう。以下述べる証明は [4] の証明とは違う。$\sigma \succ \tau \iff \tau' \succ \sigma'$ は Young 図形の対応を調べればわかるので $\sigma \succ \tau \iff \overline{O_\sigma} \supset O_\tau$ を示せばよい。

($\overline{O_\sigma} \supset O_\tau \Rightarrow \sigma \succ \tau$ の証明)

一般に $X \in \mathfrak{g}$ に対して $d_k^X(t) := ((tI-A)$ の k 次小行列式の最大公約式$)$ とおくとき，$\sigma = (b_0 \geqq b_1 \geqq \cdots)$ に対して



$X \in O_\sigma$ ならば $d_k^X(t) = t^{u_\sigma(k)}$

(ただし $u_\sigma(k) = b_{m-k} + b_{m-k+1} + \cdots\cdots$)

斜線部分の面積が $u_\sigma(k)$

となる事がわかる。$X \in O_\sigma$, $X' \in O_\tau$, $\overline{O_\sigma} \supset O_\tau$ ならば $d_k^X(t) \mid d_k^{X'}(t)$ $(k=1,2,\cdots,m)$ なので、$u_\sigma(k) \leqq u_\tau(k)$ $(\forall k)$，よって $\sigma \succ \tau$ である。

($\sigma \succ \tau \Rightarrow \overline{O_\sigma} \supset O_\tau$ の証明)

簡単な考察により、$b_k = b'_k$ $(k \neq i, j)$, $b_i = p$, $b_j = q$, $b'_i = p-1$, $b'_j = q+1$ $(p \geqq q+2)$ のとき示せばよい事がわかる。よってさらに $\sigma = (p \geqq q)$, $\tau = (p-1 \geqq q+1)$ (ただし $p \geqq q+2$) のときに示せばよい。

$$X_\varepsilon = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad p-1 \quad & \quad q+1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} & & \\ & & \\ \varepsilon & & \end{matrix} \\ \hline & \begin{matrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{matrix} \end{array}\right] \end{array}$$

とおくとき $\begin{cases} \varepsilon \neq 0 \Rightarrow X_\varepsilon \in O_\sigma \\ \varepsilon = 0 \Rightarrow X_\varepsilon \in O_\tau \end{cases}$ なので $\overline{O_\sigma} \supset O_\tau$

(証明おわり)

上の証明から次の事がわかる。

系　$X \in \overline{O_\alpha} \iff (tI - X)$ の k 次小行列式は全て $t^{u_\alpha(k)}$ でわりきれる。
$({}^\forall k = 1, 2, \cdots, n)$

いま n の分割 α に対して $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] = \mathbb{C}[X_{ij} \mid 1 \leqq i, j \leqq n]$ の有限部分集合 $\{f_i^\alpha\}$ を

$$\{f_i^\alpha\} = \left\{ \begin{array}{c} (tI - (X_{ij})) \text{ の } k \text{ 次小行列式の} \\ t^m \text{ の係数} \end{array} \middle| \begin{array}{l} k = 1, \cdots, n \\ m \leqq u_\alpha(k) - 1 \end{array} \right\}$$

により定義すると

系　$X \in \overline{O_\alpha} \iff f_i^\alpha(X) = 0 \quad ({}^\forall i)$

De Concini – Procesi の原論文 [3] では、全く別の方法により $X \in \overline{O_\alpha} \iff g_i^\alpha(X) = 0 \ ({}^\forall i)$ となる $\{g_i^\alpha\}$ を構成して §2 の問題3に関して次の予想をしている。

予想 (De Concini – Procesi)　$I(\overline{O_\alpha}) = (g_i^\alpha)$

ここでは、次の予想を記しておく。

予想（谷崎）　$I(\overline{O_\alpha}) = (f_i^\alpha)$

§4. $\mathbb{C}[\mathfrak{d} \cap \overline{O_\alpha}]$ の W-加群としての構造

4.1　簡単のため $\mathbb{C}[\mathfrak{d} \cap \overline{O_\alpha}] = \mathbb{C}[X_{ij}] / I(\mathfrak{d}) + I(\overline{O_\alpha})$ を A_α と記す事にする。

定理1　$A_\alpha \cong \mathrm{Ind}_{H_{\check\alpha}}^{S_n}(1_{H_{\check\alpha}}) \quad$ （ W-加群として）

（ここで $\check\alpha = (c_0 \geqq c_1 \geqq \cdots)$ に対して $H_{\check\alpha} = S_{c_0} \times S_{c_1} \times \cdots \subset S_n$ ）

系 $\dim A_\alpha = \binom{n}{\alpha} := \dfrac{n!}{c_0!\,c_1!\cdots\cdots}$

定理1の証明は、次の2段階にわけられる。

① $A_\alpha \hookleftarrow \mathrm{Ind}_{H_\alpha}^{S_n}(1_{H_\alpha})$ を示す。

② §3.3 で与えた $\{f_i^\alpha\} \subset I(\overline{O_\alpha})$ に対して

$\overline{A_\alpha} = \mathbb{C}[X_{ij}] / (f_i^\alpha) + I(t)$ とおくとき $\dim \overline{A_\alpha} \leqq \binom{n}{\alpha}$

A_α は $\overline{A_\alpha}$ の quotient になっているので①,②から定理1が従う事は明らかである。① は Kraft [13] に証明してあるらしい。今のところこの preprint が手に入ってないので、よくわからないが、Borho−Kraft [1] の結果を用いるらしい。[1] では、共役類の閉包が normal variety であるという仮定のもとで、種々の事を証明しているが、Kraft−Procesi [14] で A_n 型のときは任意の $\overline{O_\alpha}$ が normal になる事が示されたので、[1] の結果がそのまま使える。（ただし、一般の単純Lie環の nilpotent conjugacy class の場合は、その閉包が normal variety になるとは限らない。反例についても Kraft−Procesi [14] を見よ。）

4.2 以下②を示す。De Concini−Procesi [3] では、別の $\{g_i^\alpha\} \subset I(\overline{O_\alpha})$ を用いて議論しているが、ここでは §3.3 で与えた $\{f_i^\alpha\}$ でも同様にできる事を示す。

記号 • $A^{(n)} = \mathbb{C}[X_1,\cdots,X_n] = \mathbb{C}[X]$

• $\alpha = (b_0 \geqq b_1 \geqq \cdots)$ に対して

$$K_\alpha = \left(\begin{array}{c|l} (t-X_{i_1})\cdots\cdots(t-X_{i_k}) \in A^{(n)}[t] & k=1,2,\cdots,n \\ \text{の } t^m \text{ の係数} & 1\leqq i_1<\cdots<i_k\leqq n \\ & m \leqq u_\alpha(k)-1 \end{array}\right)$$

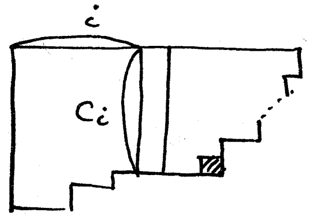
このとき $\overline{A_\alpha} = \overline{A_\alpha^{(n)}} = A^{(n)}/K_\alpha$ であるが、我々の示したいのは次の事であった。

主張 $\dim_{\mathbb{C}} \overline{A_\alpha} \leqq \binom{n}{\alpha}$

証明は n に関する帰納法による。$n=1$ のときは明らかなので、以下 $n \geqq 2$ として $(n-1)$ まで主張が正しいとする。

定義 n の分割 $\alpha = (b_0 \geqq b_1 \geqq \cdots)$ があるとき、$c_i \neq 0$ なる i に対して $(n-1)$ の分割 α^i を次の様に定義する。

α に対応するYoung図形が右図で与えられているとき、▨のところのboxを除いて得られるYoung図形に対応する $(n-1)$ の分割を α^i とする。



定義 algebra homomorphism $A^{(n)} \xrightarrow{\Phi} A^{(n-1)}$ を

$X_j \longmapsto X_j \ (j \neq n)$, $X_n \longmapsto 0$ により定義する。

以下の方針は次のとおり。

(I) Φ は $\overline{A_\alpha^{(n)}} \xrightarrow{\Phi_i} \overline{A_{\alpha^i}^{(n-1)}}$ なる全射準同型を引きおこす。

(II) $\overline{A_\alpha^{(n)}}$ の ideal J_i を $J_i = \overline{A_\alpha^{(n)}}\cdot X_n^i$ により定義するとき J_i/J_{i+1} は $\overline{A_\alpha^{(n)}}$-加群だが、さらに $\overline{A_{\alpha^i}^{(n-1)}}$-加群の構

造が入る。(i.e. $(\mathrm{Ker}\,\Phi_i)\cdot X_m^{i} \subset (X_m^{i+1})$)

(III) $c_i=0$ のとき $J_i=0$ (i.e. $X_m^i=0$ in $\overline{A_\alpha^{(m)}}$)

(I), (II), (III) から主張が示される事を見ておこう。J_i/J_{i+1} は $\overline{A_{\alpha^i}^{(m-1)}}$ -module として single generator を持つので、

$\dim(J_i/J_{i+1}) \leqq \dim \overline{A_{\alpha^i}^{(m-1)}} \leqq \binom{m-1}{\alpha^i}$ (∵ 帰納法の仮定)

よって $\dim \overline{A_\alpha^{(m)}} = \sum_{\substack{i\geqq 0\\ c_i\neq 0}} \dim(J_i/J_{i+1}) \leqq \sum_i \binom{m-1}{\alpha^i} = \binom{m}{\alpha}$ となる。

(III) の証明は (II) の証明の一部分に含まれるので (I) (II) を示せばよい。

α^i の定義から、次の補題はすぐわかる。

補題 $1\leqq k\leqq m$, $u_\alpha(k)\geqq 1$ $1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_k\leqq m$ として、$(t-X_{i_1})\cdots\cdots(t-X_{i_k})$ の t^m の係数を D_m とする。

(i) $i_k=m$ のとき

$$\Phi(D_m)\in[K_{\alpha_i} \text{ の generator system}] \Leftrightarrow \begin{cases} m\leqq u_\alpha(k) & (k\leqq m-c_i)\\ m\leqq u_\alpha(k)-1 & (k>m-c_i)\end{cases}$$

(ii) $i_k<m$ のとき

$$\Phi(D_m)\in[K_{\alpha_i} \text{ の generator system}] \Leftrightarrow \begin{cases} m\leqq u_\alpha(k+1)-1 & (k<m-c_i)\\ m\leqq u_\alpha(k+1)-2 & (k\geqq m-c_i)\end{cases}$$

よって (I) の正しい事がわかる。また $\overline{A_\alpha^{(m)}}$ の ideal $\mathrm{Ker}\,\Phi_i$ は次の様な生成系を持つ事もわかる。

補題 $\mathrm{Ker}\,\Phi_i = (X_m)$

$$+\left(\begin{array}{c|l} (t-X_{i_1})\cdots(t-X_{i_k})\text{の} & i_k<m \\ t^m\text{の係数} & m \leqq u_\alpha(k+1)-1 \quad (k \leqq m-c_i-1) \\ & m \leqq u_\alpha(k+1)-2 \quad (k \geqq m-c_i) \end{array} \right)$$

$$+\left(\begin{array}{c|l} (t-X_{i_1})\cdots(t-X_{i_k})\text{の} & i_k=m \\ t^{u_\alpha(k)}\text{の係数} & k \leqq m-c_i \end{array} \right)$$

(II)を示すには、$(\mathrm{Ker}\,\Phi_i)X_m^i \subset (X_m^{i+1})$ (in $\overline{A_\alpha^{(m)}}$)を示せばよい。すなわち、次の事を示せばよい。

補題

(i) $X_m^i(t-X_{i_1})\cdots(t-X_{i_k})$ の t^mの係数 $\in (X_m^{i+1})$ (in $\overline{A_\alpha^{(m)}}$)

ただし $i_k<m$, $m \leqq u_\alpha(k+1)-1$ $(k \leqq m-c_i-1)$

$m \leqq u_\alpha(k+1)-2$ $(k \geqq m-c_i)$

(ii) $X_m^i(t-X_{i_1})\cdots(t-X_{i_k})$ の $t^{u_\alpha(k)}$の係数 $\in (X_m^{i+1})$ (in $\overline{A_\alpha^{(m)}}$)

ただし $i_k=m$, $k \leqq m-c_i$

(証明) 以下の議論は全て $\overline{A_\alpha^{(m)}}[t]$ で考える事とする。

まず(i)を示す。$(t-X_{i_1})\cdots\cdots(t-X_{i_k})=t^k+a_{k-1}t^{k-1}+\cdots+a_1t+a_0$ とおく。$\overline{A_\alpha^{(m)}}[t]$ 中で考えているので

$$(t-X_m)(t-X_{i_1})\cdots\cdots(t-X_{i_k})=(t-X_m)(t^k+a_{k-1}t^{k-1}+\cdots+a_0)$$

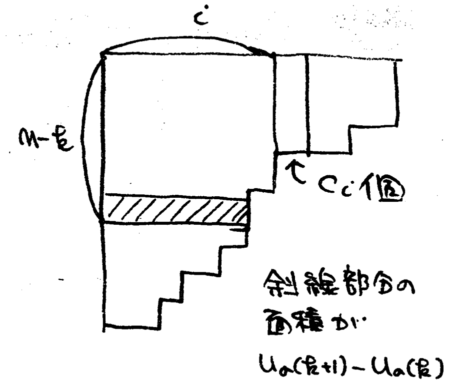
の t^m の係数は全て0である。(ただし $m \leqq u_\alpha(k+1)-1$)

よって展開すると

$$-a_0X_m=0$$

$$a_0-a_1X_m=0$$

$$a_1 - a_2 X_m = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{u_\alpha(\ell+1)-2} - a_{u_\alpha(\ell+1)-1} X_m = 0$$



$$a_m X_m^i = a_{m+1} X_m^{i+1} \in (X_m^{i+1})$$
$$(m \leqq u_\alpha(\ell+1)-2)$$

なので $\ell \leqq n-c_i-1$, $m = u_\alpha(\ell+1)-1$ としてよい。このとき $u_\alpha(\ell+1)-u_\alpha(\ell) \leqq i$ である。(上図参照)

よって
$$a_{u_\alpha(\ell+1)-1} X_m^i = a_{u_\alpha(\ell+1)-2} X_m^{i-1}$$
$$\vdots$$
$$= a_{u_\alpha(\ell)-1} X_m^{i-(u_\alpha(\ell+1)-u_\alpha(\ell))}$$

$a_{u_\alpha(\ell)-1} = 0$ in $\overline{A^{(a)}_\sigma}$. なので (i) が示された。

次に (ii) を示す。$(t-X_{i_1})\cdots(t-X_{i_{\ell-1}}) = t^{\ell-1} + b_{\ell-2}t^{\ell-2} + \cdots + b_0$

とおく。$(t-X_{i_1})\cdots(t-X_{i_\ell}) = (t-X_m)(t^{\ell-1} + b_{\ell-2}t^{\ell-2} + \cdots + b_0)$

なので

$\big((t-X_{i_1})\cdots(t-X_{i_\ell})$ の $t^{u_\alpha(\ell)}$ の係数$\big)\cdot X_m^i$

$= b_{u_\alpha(\ell)-1} X_m^i - b_{u_\alpha(\ell)} X_m^{i+1}$

となるが、$\ell-1 \leqq n-c_i-1$ なので (i) により $b_{u_\alpha(\ell)-1} X_m^i \in (X_m^{i+1})$

よって (ii) も示された。　　　　(証明おわり)

注意　定理1の証明から $A_\alpha = \bigoplus_i X_m^i A^{(m-1)}_{\sigma_i}$ と書ける事がわかる。これから帰納的に A_α の base が与えられる。特に graded algebra A_α の最高次の部分の基底は、type α の

Young 図形上の standard tableaux と1対1に自然に対応してとらえられる。§5の定理2からもわかるが、A_α の最高次の部分は W-加群としては α に対応する既約表現(cf. 岩堀[7], 彌永-杉浦[8])になっている。また standard tableaux によりとらえられる base は、いわゆる Young の標準基底(cf. 彌永-杉浦[8])になっている様である。

§5. Springer 表現との関係

5.1 代数多様体 $\mathcal{B}$ とその cohomology 環 $H^*(\mathcal{B})$ について。
$G = GL_n(\mathbb{C}) = GL(V)$ ($V = \mathbb{C}^n$) として V の complete flag の全体を $\mathcal{B}$ と書く。すなわち

$$\mathcal{B} = \{(0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V) \mid \dim V_i = i \ (\forall i)\}$$

いま、$B = \{(g_{ij}) \in GL_n(\mathbb{C}) \mid g_{ij} = 0 \quad (i > j)\}$ とおくとき B は G の Borel 部分群であるが、次の様な1対1の対応がある。

$$\begin{array}{ccccc} \{G\text{の Borel 部分群}\} & \leftrightarrow & G/B & \leftrightarrow & \mathcal{B} \\ \cup\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\mid \\ gBg^{-1} & \leftrightarrow & gB & \leftrightarrow & \{(V_i) \mid V_i = \bigoplus_{j=1}^{i} \mathbb{C} g e_j\} \end{array}$$

(ただし、$\mathbb{C}^n$ の standard base を $e_1, \cdots, e_n$ とする。)

さて G/B は非特異射影代数多様体なので、$\mathcal{B}$ にも非特異射影代数多様体の構造が入る。また $\mathcal{B}$ の cohomology 環 $H^*(\mathcal{B}) = H^*(\mathcal{B}, \mathbb{C})$ は次の様に記述できる。$\mathcal{B}$ 上の Trivial vector bundle

$\mathcal{B} \times V$ の k 次元の subbundle で各点 $(V_i) \in \mathcal{B}$ での fibre が V_k になっているものを、記号を乱用してまた V_k と書く事にし、line bundle V_k / V_{k-1} の Chern 類を $\overline{x_k} \in H^2(\mathcal{B})$ とする。

命題 (Cf. Kleiman [10])

i) cohomology 環 $H^*(\mathcal{B})$ は $\overline{x_1}, \cdots, \overline{x_n}$ で生成される。

ii) 多項式環 $\mathbb{C}[\mathfrak{t}] = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ から $H^*(\mathcal{B})$ への準同型

$$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] \xrightarrow{\pi} H^*(\mathcal{B}) \qquad (\pi(x_i) = \overline{x_i})$$

の Kernel は ideal として $x_1, \cdots, x_n$ の基本対称式 $f_1, \cdots, f_n$ により生成される。

従って環同型

$$\mathbb{C}[\mathfrak{t} \cap N] = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] / (f_1, \cdots, f_n) \xrightarrow[\sim]{\overline{\pi}} H^*(\mathcal{B})$$

が得られた。

5.2 Springer 表現

$\mathcal{B}$ には次の様にして Weyl 群 $W = \mathfrak{S}_n$ の右からの作用が定義できる。$(V_i) \in \mathcal{B}$ とするとある $g \in GL_n(\mathbb{C})$ に対して $V_i = \bigoplus_{j=1}^{i} \mathbb{C} g e_j$ とかける。$w \in W = \mathfrak{S}_n$ に対して

$$(V_i) \cdot w = (V_i') \qquad ここで\ V_i' = \bigoplus_{j=1}^{i} \mathbb{C} g (e_{w^{-1}(j)})$$

よって W は $H^*(\mathcal{B})$ に左から作用する。このとき環同型写像 $\mathbb{C}[\mathfrak{t} \cap N] \xrightarrow[\sim]{\overline{\pi}} H^*(\mathcal{B})$ は W-加群としての同型写像にもなっている。

いま n の分割 η に対して Type η の nilpotent element X_0 を

固定して、$\mathcal{B}$ の部分(代数)多様体 $\mathcal{B}_\eta$ を

$$\mathcal{B}_\eta = \{(V_i) \in \mathcal{B} \mid X_0(V_i) \subset V_{i-1} \ (i=1,2,\cdots,m)\}$$

により定義する。$\mathcal{B}$ を{Borel 部分群}と同一視すると $\mathcal{B}_\eta = \{B' : \text{Borel 部分群} \mid B' \text{の Lie 環が } X_0 \text{ を含む}\}$ と書ける。

さて、Springer [20] [21] は $\mathcal{B}_\eta$ の cohomology 環 $H^*(\mathcal{B}_\eta)$ にも奇妙な方法で W-加群の構造を定義したが、$\eta_0 = (1 \geq 1 \geq \cdots\cdots)$ に対しては $\mathcal{B}_{\eta_0} = \mathcal{B}$ となり、Springer の与えた $H^*(\mathcal{B})$ の W-加群の構造は、はじめに与えた自然なものと一致する。(ただし一般の η に対しては、$H^*(\mathcal{B}_\eta)$ の W-加群の構造は $\mathcal{B}_\eta$ への何らかの W の作用から導びかれたものとはならない。) この Springer 表現について次の事が知られている。

<u>命題</u> $\mathcal{B}_\eta \hookrightarrow \mathcal{B}$ により導びかれる環準同型を $H^*(\mathcal{B}) \xrightarrow{\rho_\eta} H^*(\mathcal{B}_\eta)$ とする。

(i) ρ_η は W-加群としての準同型である。

(ii) ρ_η は全射である。

(iii) $H^*(\mathcal{B}_\eta) \cong \mathrm{Ind}_{H_\eta}^{S_m}(1_{H_\eta})$ (W-加群として)

(i) は Hotta-Springer [6] に証明してあるが自明な事ではない。また (ii) も同じく [6] に証明があるが、A_m 型以外の群については対応する事実は一般には成立しない。(iii) は Macdonald の結果(未発表)であるが、Hotta-Shimomura [5] に2種類の証明

が書いてある。

5.3 主定理

定理1及び命題5.2により $A_{\check{\eta}}=\mathbb{C}[\mathfrak{t}\cap\overline{O_{\check{\eta}}}]$ と $H^*(\mathcal{B}_\eta)$ はW-加群として同型であるが、これらの間に次の様な自然な同型写像がある事を主張するのが、次の定理2である。

定理2 次のdiagramを可換にする様な同型 j_η（環同型でかつW-加群としての同型）が唯一つある。

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[\mathfrak{t}\cap N] \arrow[r, "\overline{\pi}", "\sim"'] \arrow[d, "\pi_{\check{\eta}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H^*(\mathcal{B}) \arrow[d, "\rho_\eta"] \\
A_{\check{\eta}} \arrow[r, "\sim", "j_\eta"'] & H^*(\mathcal{B}_\eta)
\end{tikzcd}
$$

（ただし $\pi_{\check{\eta}}$ は自然な全射準同型）

$\pi_{\check{\eta}}$ 及び ρ_η は全射準同型であり $\dim A_{\check{\eta}}=\dim H^*(\mathcal{B}_\eta)$ なので $\mathrm{Ker}\,\pi_{\check{\eta}}$ の生成系（§4で与えてある。）の $\rho_\eta\circ\overline{\pi}$ による像が $H^*(\mathcal{B}_\eta)$ 中で消える事を示せば定理2は証明される。De Concini-Procesi の原論文では別の方法で $\mathrm{Ker}\,\pi_{\check{\eta}}$ の生成系を定義し、それを用いて上記の事を示しているが、§4で与えた様な生成系を用いると以下の様により簡単に証明できる。

5.4 Grassman多様体とSchubert多様体

$1\leqq l\leqq n$ に対して、$V=\mathbb{C}^n$ の l 次元部分空間全体のつくるGrassman多様体を $Gr_l(V)$ と書く。V の flag

$(\cdots\cdots\subset X_0^2(V)\subset X_0(V)\subset V)$ を細分して、V の complete flag

$(0=V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_m=V)$ をひとつとり固定する。

$0\leqq\lambda_0\leqq\lambda_1\leqq\cdots\leqq\lambda_\ell\leqq m-\ell$ なる整数の列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\ell)$ に対して、次の様にして定義される $Gr_\ell(V)$ の subvariety Y_λ を λ に対応する Schubert 多様体という。

$$Y_\lambda=\{W\in Gr_\ell(V)\mid \dim(W\cap V_{\lambda_i+i})\geqq i\quad(\forall i=1,\cdots,\ell)\}$$

<u>命題</u> (i) $Y_\lambda\supset Y_\mu \Longleftrightarrow \lambda_i\geqq\mu_i\ (\forall i=1,\cdots,\ell)$
(C.f.[10])
(このとき $\lambda\geqq\mu$ と書く事にする。)

(ii) $\overset{\circ}{Y}_\lambda=Y_\lambda-\bigcup_{\mu\lneqq\lambda}Y_\mu$ とおくとき

$Gr_\ell(V)=\coprod_\lambda\overset{\circ}{Y}_\lambda$ であり、これは $Gr_\ell(V)$ の cell 分割を与える。

<u>命題</u> 自然な projection $\mathcal{B}\xrightarrow{P}Gr_\ell(V)\quad(P((V_i))=V_\ell)$ に関して $P(\mathcal{B}_\eta)\subset Y_{\lambda_0}$。

ここで $\lambda_0=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{u_{\check{\eta}}(\ell)\text{個}},\underbrace{m-\ell,m-\ell,\cdots,m-\ell}_{(\ell-u_{\check{\eta}}(\ell))\text{個}})$

(証明) $\mathcal{B}_\eta$ の定義式により、$(V_i)\in\mathcal{B}_\eta$ ならば $V_\ell\supset X_0^{m-\ell}(V)$。

$\dim X_0^{m-\ell}(V)=\operatorname{rank}X_0^{m-\ell}=u_{\check{\eta}}(\ell)$ なので (V_i) の定義から $X_0^{m-\ell}(V)=V_{u_{\check{\eta}}(\ell)}$ となる。従って $i\leqq u_{\check{\eta}}(\ell)$ のとき $\dim(V_\ell\cap V_i)=\dim V_i=i$。また $i>u_{\check{\eta}}(\ell)$ のとき $\dim(V_\ell\cap V_{(m-\ell)+i})\geqq i$。よって証明おわり。

§.5 Grassman 多様体の cohomology 環

定義 $0 \leqq \lambda_1 \leqq \cdots \leqq \lambda_\ell$ なる自然数の列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)$ に対して

$$[\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell] = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1} & x_2^{\lambda_1} & \cdots\cdots & x_\ell^{\lambda_1} \\ x_1^{\lambda_2+1} & x_2^{\lambda_2+1} & \cdots\cdots & x_\ell^{\lambda_2+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{\lambda_\ell+\ell} & x_2^{\lambda_\ell+\ell} & \cdots\cdots & x_\ell^{\lambda_\ell+\ell} \end{vmatrix} \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_\ell]$$

とおき

$$S_\lambda(x_1, \cdots, x_\ell) = \frac{[\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell]}{[0, \cdots, 0]}$$

により定義される ℓ 変数の対称多項式 $S_\lambda(x_1, \cdots, x_\ell)$ を Schur 関数と呼ぶ。

注意 ℓ 変数 $x_1, \cdots, x_\ell$ の j 次基本対称式を $h_{\ell,j}$ と書く。

(i.e. $(t-x_1)\cdots(t-x_\ell) = t^\ell - h_{\ell,1}t^{\ell-1} + h_{\ell,2}t^{\ell-2} - \cdots + (-1)^\ell h_{\ell,\ell}$)

このとき $h_{\ell,j} = S_{\underbrace{(0, \cdots, 0, \underbrace{1, \cdots, 1}_{j\text{個}})}_{\ell\text{個}}}$

命題 (cf. Kleiman [10])

(i) $B \xrightarrow{p} Gr_\ell(V)$ から引きおこされる準同型 $H^*(Gr_\ell(V)) \xrightarrow{p^*} H^*(B)$ は単射であり、その像は最初の ℓ 個の Chern 類 $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_\ell$ の対称多項式全体である。

(よって以下 $H^*(Gr_\ell(V))$ は $H^*(B)$ の部分環とみなす。)

(ii) Schur 関数 $S_\lambda(\bar{x}_1, \cdots\cdots, \bar{x}_\ell)$ が non-zero であるためには $\lambda_\ell \leqq n-\ell$ である事が必要十分である。

(iii) non-zero な Schur 関数 $S_\lambda(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_\ell)$ の全体は、

cell 分割 $Gr_\ell(V)=\coprod_\lambda \overset{\circ}{Y}_\lambda$ からできる homology 群

$H_*(B)$ の base の dual base になっている。

すなわち $\langle S_\lambda(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_\ell), \overset{\circ}{Y}_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}$

5.6 定理 2 の証明

定理 1 の証明からわかる様に、我々の示すべき事は次の事である。

主張 $1\leqq \ell \leqq m$ に対して、$\rho_\eta\left(h_{\ell,j}(\bar{x}_{i_1},\cdots,\bar{x}_{i_\ell})\right)=0$ in $H^*(B_\eta)$

ただし $1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_\ell\leqq m$, $j\geqq \ell-(u_\eta^\vee(\ell)-1)$

ρ_η は W-加群としての準同型なので（命題 5.2 (1)）

$i_1=1, i_2=2,\cdots,i_\ell=\ell$ としてよい。よって 5.5 の注意から

さらに次の事を示せばよい。

主張′ $1\leqq \ell\leqq m$ に対して $\rho_\eta\left(S_{(0,\cdots,0,\underbrace{1,\cdots,1}_{j})}(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_\ell)\right)=0$

ただし $j\geqq \ell+1-u_\eta^\vee(\ell)$

§5.5 から $p(B_\eta)\subset Y_{\lambda_0}$ なので、次の可換図式が成立する。

$$\begin{array}{ccc} H^*(B) & \xleftarrow{p^*} & H^*(Gr_\ell(V)) \\ \rho_\eta\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow i^* \\ H^*(B_\eta) & \xleftarrow[k^*]{} & H^*(Y_{\lambda_0}) \end{array}$$

$j\geqq \ell+1-u_\eta^\vee(\ell)$ のとき $\lambda_0 \not\geqq (0,\cdots,0,\underbrace{1,\cdots 1}_{j})$

従って $i^*(S_{(0,\cdots,0,\underbrace{1,\cdots,1}_{j})}(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_\ell))=0$

ゆえに

$$\rho_\eta(S_{(0,\cdots,0,\underbrace{1,\cdots,1}_{j})}(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_\ell)) = k^*\circ i^*(S_{(0,\cdots,0,\underbrace{1,\cdots,1}_{j})}(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_\ell))=0$$

よって定理2が示された。

文献表

[1] Borho W., Kraft H. : Über Bahnen und deren Deformationen bei linearen Aktionen reduktiver Gruppen. Comment. Math. Helvetici 54 (1979) 61—104

[2] Brieskorn E. : Singular elements of semisimple algebraic groups Actes, Congrès interm. Math. (1970) Tome 2. 279-284

[3] De Concini C., Procesi C. : Symmetric functions, conjugacy classes and the flag variety preprint (1980)

[4] Gerstenhaber M. : On dominance and varieties of commuting matrices Ann. of Math. 73 (1961) 324-348

[5] Hotta R., Shimomura N. : The fixed point subvarieties of unipotent transformations on generalized flag varieties

and the Green functions.

Math. Ann. 241 (1979) 193–208

[6] Hotta R., Springer T. A. : A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of unitary groups.

Inventiones math. 41 (1977) 113–127

[7] 岩堀長慶：対称群と一般線型群の表現論

岩波講座基礎数学 (1978)

[8] 彌永昌吉, 杉浦光夫：応用数学者のための代数学

岩波 (1960)

[9] Kazhdan D., Lusztig G. : A Topological approach to Springer's representations.

Advances in Math. 38 (1980) 222–228

[10] Kleiman S.L. : Rigourous foundations of Schubert's enumerative calculus.

Proc. of Symp. in Pure Math. Vol XXVIII (1976)

[11] Kostant B. : Lie groups representations on polynomial rings.

Amer. J. Math. 85 (1963) 327–404

[12] Kostant B., Rallis S. : Orbits and representations associated with symmetric spaces.

Amer. J. Math. 93 (1971) 753–809

[13] Kraft. H. : preprint

to appear in Proc. Torun Conference – Asterisque

[14] Kraft H., Procesi C. : Closures of conjugacy classes of matrices are normal.

Inventiones math. 53 (1979) 227–247

[15] 草場公邦：行列特論

裳華房 (1979)

[16] Lusztig G. : Green polynomials and singularities of unipotent classes. preprint (1980)

[17] Mumford D. : Geometric invariant theory

Springer-Verlag (1965)

[18] Slodowy P. : Simple singularities and simple algebraic groups

Springer Lecture Notes in Math 815 (1980)

[19] ———— : Four lectures on simple groups and singularities

Communications of the Mathematical Institute, Rijksuniversiteit Utrecht Vol 11 (1980)

[20] Springer T.A. : Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups.

Inventiones Math. 36 (1976) 173–207

[21] ——— : A construction of representations of Weyl groups.
Inventiones math. 44 (1978) 279-293

[22] Vimberg È. B. : The Weyl group of a graded Lie algebras.
Math. USSR Izvestija 10 (1976) No: 3.